



## MODELAGEM DE FENÔMENOS NATURAIS UTILIZANDO SISTEMAS AUTÔNOMOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

ELQUIS VITOR MACHADO FREITAS; RODRIGO SILVA DOS SANTOS

### RESUMO

Equações diferenciais (EDs), normalmente estudadas em cursos de Ciências Exatas, da Natureza e Engenharia, são muito úteis para modelar diversos fenômenos naturais e até mesmo sociais. Devido a essa aplicabilidade, esse tem sido um tema amplamente empregado em projetos de iniciação científica. O presente trabalho surge justamente nesse contexto. Porém, como existem muitas aplicações de EDs, o escopo deste resumo expandido é limitado a sistemas de equações diferenciais por ser mais graficamente representável. Tendo isso em vista, a introdução comenta sistemas autônomos planos e apresenta um resumo geométrico de um método de análise de estabilidade de pontos críticos, tornando possível explorar os problemas que se seguirão. Naturalmente, o objetivo central da pesquisa foi obter aplicações da teoria envolvida na análise qualitativa de sistemas de equações diferenciais. Para isso, foi realizada uma pesquisa exploratória do tipo revisão bibliográfica baseada em textos clássicos sobre equações diferenciais e suas aplicações. Desse modo, foram encontradas três aplicações principais: o pêndulo não linear, o modelo de predador-presa de Lotka-Volterra e o modelo de competição de Lotka-Volterra. O primeiro é um modelo físico que, em contrapartida ao pêndulo simples, não é uma aproximação para pequenos ângulos. Portanto, é um modelo físico mais apropriado, apesar de desconsiderar as forças de amortecimento. Os outros dois modelos citados, de Lotka-Volterra, são da área da Biologia. No primeiro modelo, considera-se que uma espécie de predador alimenta-se apenas de uma espécie de presa. Já no segundo modelo, duas espécies diferentes competem por recursos em comum, como água, habitação e assim por diante. Destarte, os resultados encontrados foram satisfatórios se comparados com a literatura.

**Palavras-chave:** pêndulo não linear; modelos de Lotka-Volterra; estabilidade de pontos críticos.

### 1 INTRODUÇÃO

Uma equação diferencial (ED) pode ser definida como “uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes” (Zill; Cullen, 2001a, p. 2). É possível formar um sistema de equações diferenciais com  $n$  EDs e  $n$  variáveis dependentes de uma variável independente, por exemplo,  $t$  (Zill, 2016). Para os fins do presente trabalho, supõe-se um sistema da forma a seguir.

$$\begin{aligned}x' &= P(x, y) \\ y' &= Q(x, y)\end{aligned}$$

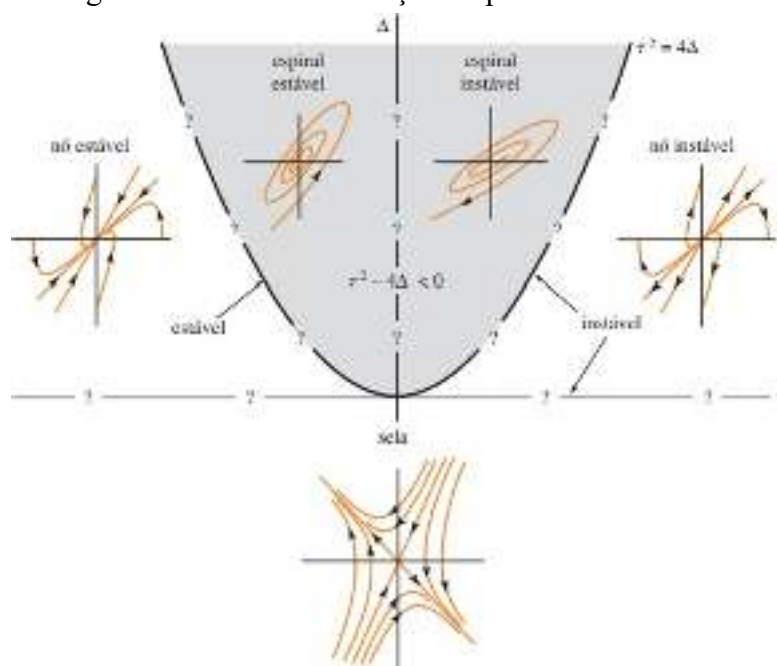
Esse sistema é chamado de autônomo plano. O vetor  $V(x, y) = (P, Q) = (x', y')$  define um campo vetorial e pode ser interpretado como a velocidade de uma partícula em um

ponto do plano. Se  $V = (0, 0)$  em um ponto  $X = (x, y)$ , esse ponto é denominado de ponto crítico. A interpretação física do ponto crítico é simples: uma partícula que está ali fica estática, ou seja, não sai do lugar (Zill; Cullen, 2001b). A seguir está definida a matriz Jacobiana de um sistema autônomo plano em um ponto  $(x, y)$ .

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{(x_1, y_1)} & \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{(x_1, y_1)} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{(x_1, y_1)} & \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_{(x_1, y_1)} \end{pmatrix}$$

A partir disso, é definido o traço  $\tau$  como a soma dos elementos da diagonal principal dessa matriz e  $\Delta$  como o determinante dessa matriz. Com base nesses parâmetros é possível classificar os pontos críticos de um sistema com base em sua estabilidade - estável e instável - e com base no formato das curvas próximas a esse ponto: nó estável, nó instável, espiral estável, espiral instável, ponto de sela e centro. A figura a seguir apresenta um resumo geométrico de como classificar os pontos críticos por meio da matriz Jacobiana (Zill; Cullen, 2001b).

**Figura 1** - Resumo geométrico da classificação de pontos críticos.



**Fonte:** Zill e Cullen (2009).

Existem várias aplicações de equações diferenciais e de sistemas de EDs, principalmente na Física, Engenharia, Biologia, Química, Economia, Ciências Humanas e assim por diante. Desse modo, um estudo nesse âmbito é útil para entender não só as aplicações práticas das teorias matemáticas, mas também para modelar sistemas naturais (Zill; Cullen, 2001a; Nagle; Saff; Snider, 2012). Por isso, o presente trabalho tem por objetivo verificar, em textos clássicos de equações diferenciais, aplicações de sistemas autônomos planos de equações diferenciais.

## 2 MATERIAL E MÉTODOS

A pesquisa realizada foi do tipo exploratória, ou seja, buscou obter mais informações sobre o tema estudado. Naturalmente, os dados obtidos são de natureza quantitativa

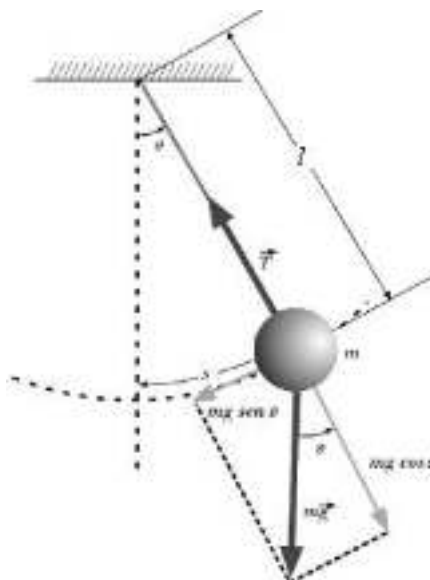
(Cerqueira; Rosário; Moraes, 2013). A pesquisa foi do tipo revisão bibliográfica, que foi baseada em textos didáticos reconhecidos sobre equações diferenciais e suas aplicações, bem como em dissertações, monografias, teses e artigos encontrados na ferramenta de pesquisa *Google Acadêmico*.

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foram encontradas três aplicações principais de sistemas autônomos de equações diferenciais: pêndulo não linear, modelo de predador-presa de Lotka-Volterra e modelo de competição de Lotka-Volterra (Zill; Cullen, 2009; Zill; Cullen, 2001b).

Um pêndulo pode ser definido como um sistema no qual uma massa de dimensões desprezíveis (puntiforme) está pendurada por um fio inextensível e eventualmente é deslocado em um ângulo  $\theta$  da posição de equilíbrio (Figura 2). O movimento de um pêndulo pode ser descrito por uma EDO não linear na forma dada em (1) (Zill; Cullen, 2001a).

**Figura 2** - Pêndulo e as forças atuantes no sistema.



**Fonte:** Arnold et al (2011).

$$\theta'' + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

O comprimento do fio é representado por  $l$  e  $g$  é o módulo da aceleração da gravidade. Adotando  $x = \theta$  e  $y = x' = \theta'$ , obtém-se um sistema de EDs não lineares.

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\frac{g}{l} \sin x \end{aligned}$$

Os pontos críticos do sistema são  $(\pm k\pi, 0)$ , onde  $k$  é um número natural. A matriz Jacobiana é:

$$A((\pm k\pi, 0)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{k+1} \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}.$$

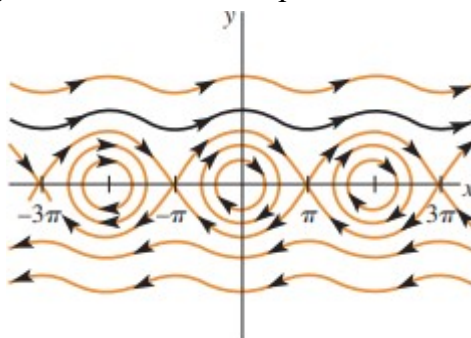
Se  $k$  é ímpar,  $\Delta < 0$  e os pontos críticos são ponto de sela. Se  $k$  é par, a natureza dos pontos críticos é incerta. Desconsiderando forças de amortecimento e utilizando o método do plano de fase (apenas fazer  $Q/P$  e resolver pelos métodos de resolução de EDOs), encontra-se

a solução implícita a seguir (Zill; Cullen, 2009; Zill; Cullen, 2001b).

$$(2) \quad y^2 = \frac{2g}{l} \cos x + c$$

A figura a seguir apresenta um perfil de fase do pêndulo não linear.

**Figura 3** - Perfil de fase pêndulo não linear.



**Fonte:** Zill e Cullen (2009).

O modelo de Lotka-Volterra é baseado em um sistema no qual um predador se alimenta de uma só presa. Obviamente, isso não acontece na realidade. Na realidade, porém, alguns predadores se alimentam quase exclusivamente de uma só presa. Assim, é possível observar que o ciclo populacional desses animais possui uma duração muito próxima. Se  $x$  é o número de predadores,  $y$  é o número de presas, e  $a, b, c, d$  são constantes positivas, então o modelo de Lotka-Volterra fornece o seguinte sistema (Zill; Cullen, 2009; Zill; Cullen, 2001b).

$$\begin{aligned} x' &= x(-a + by) \\ y' &= y(-cx + d) \end{aligned}$$

Quando a população de predadores é nula, a população de presas aumenta exponencialmente ( $y' = dy$ ); quando não há presas, a população de predadores cai exponencialmente. O encontro entre presas e predadores causa uma taxa de morte das presas de  $-cx$  e o aumento da população de predadores em proporção  $bxy$ . Os pontos críticos são  $(0, 0)$ ,  $(d/c, a/b)$ . A matriz Jacobiana nesses pontos críticos segue abaixo (Zill; Cullen, 2009; Zill; Cullen, 2001b).

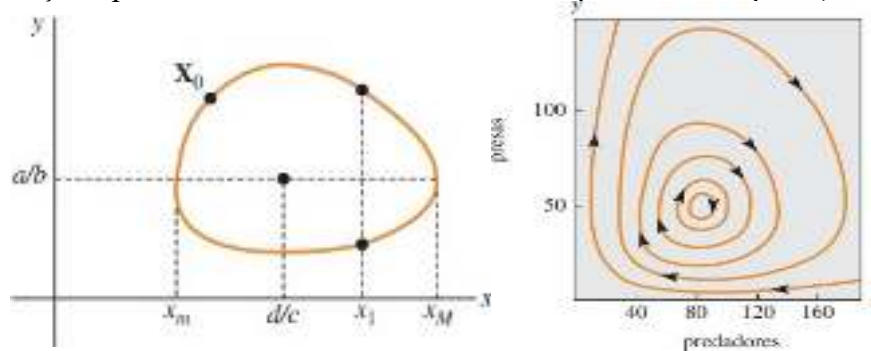
$$A_1 = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & bd/c \\ -ac/b & 0 \end{pmatrix}$$

Assim,  $(0, 0)$  é um ponto de sela e não é útil biologicamente. Como foi feito no pêndulo não linear, o ponto crítico  $(d/c, a/b)$  pode ser analisado por meio do método do plano de fase, de onde obtém-se uma solução implícita do sistema.

$$-a \ln y + by = -cx + d \ln x + c_1 \Leftrightarrow (x^d e^{-cx})(y^a e^{-by}) = c_0$$

O gráfico de uma solução periódica do modelo é apresentado abaixo, bem como o perfil de fase de um sistema que possui ponto crítico Cullen, 2001b). (80, 50) (Zill; Cullen, 2009; Zill;

**Figura 4** - Solução típico do modelo de Lotka Volterra e perfil de fase para (80, 50).



**Fonte:** Zill e Cullen (2009).

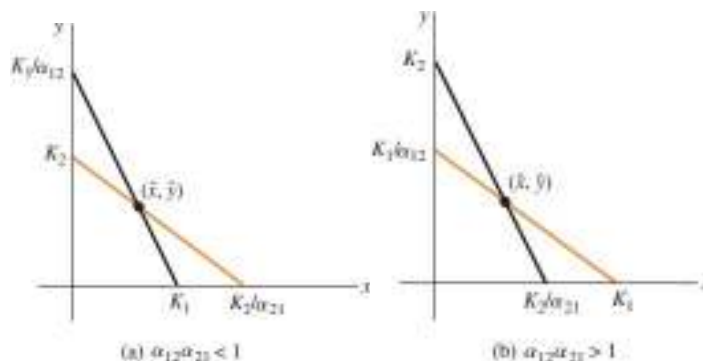
Outro modelo aplicado à Biologia é o de competição de Lotka-Volterra, onde duas espécies  $x$  e  $y$  competem por recursos, como alimento, água, habitação, etc. O modelo é dado pelo sistema a seguir (Zill; Cullen, 2009; Zill; Cullen, 2001b).

$$\begin{aligned}x' &= \frac{r_1}{K_1}x(K_1 - x - a_{12}y) \\y' &= \frac{r_2}{K_2}y(K_2 - y - a_{21}x)\end{aligned}$$

Se existir só uma espécie, a outra crescerá logisticamente até alcançar um número máximo de indivíduos. Os termos  $a_{12}$  e  $a_{21}$  representam o efeito da competição das espécies. Ou seja, a taxa de inibição é proporcional ao número de competidores  $xy$ . Os pontos críticos do sistema são  $(0, 0)$ ,  $(K_1, 0)$ ,  $(0, K_2)$ .

Se  $a_{12}a_{21} \neq 0$ , há um quarto ponto crítico  $X = (x, y)$  obtido a partir da intersecção das retas  $K_1 - x - a_{12}y = 0$  e  $K_2 - y - a_{21}x = 0$  (Figura 5). Se  $K_1/a_{12} > K_2$  e  $K_2/a_{21} > K_1$ , então  $(x_a, y_a)$  é um nó estável. Se o ponto inicial  $X_0 = (0, 0)$  estiver próximo de  $X_a$ , a coexistência é possível (interações competitivas pequenas, ou seja, as disputas entre as espécies não são tão grandes). Se  $a_{12}a_{21} > 1$ ,  $X_a$  é um ponto de sela. (Zill; Cullen, 2009; Zill; Cullen, 2001b).

**Figura 5** - Intersecção das retas  $K_1 - x - a_{12}y = 0$  e  $K_2 - y - a_{21}x = 0$ .



**Fonte:** Zill e Cullen (2009).

Outros autores também realizaram estudos sobre aplicações de equações diferenciais. Entre os trabalhos encontrados, notam-se o de Santos (2023), no qual foram apresentadas

várias aplicações simples de EDOs; mas também os trabalhos de Bessa (2011) e Carvalho (2019), que abordaram sistemas de EDs, bem como os modelos de Lotka-Volterra de modo semelhante ao que foi desenvolvido no presente trabalho. Em geral, as aplicações encontradas não são tão cotidianas. Outrossim, comparada à literatura, os resultados do presente trabalho são satisfatórios.

#### 4 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo verificar aplicações de sistemas autônomos planos de equações diferenciais. E, de fato, esse objetivo foi alcançado, com três aplicações encontradas: pêndulo não linear, modelo de predador-presa de Lotka-Volterra e modelo de competição de Lotka-Volterra. O pêndulo não linear, geralmente simplificado como pêndulo simples, pode ser analisado qualitativamente. As outras duas aplicações, os modelos de Lotka-Volterra, são aplicadas na área de biologia e descrevem sistemas idealizados. Apesar dos conhecimentos apresentados sobre essas três aplicações, é necessário dizer que o estudo é limitado pois baseou-se em poucos textos e obteve poucas aplicações. Sugere-se, assim, que futuros trabalhos utilizem mais textos como base para obter mais aplicações.

#### REFERÊNCIAS

- ARNOLD, F. J. et al. Estudo do amortecimento do pêndulo simples: uma proposta para aplicação em laboratório de ensino. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Brasil, v. 33, n. 4, p. 4311 (1-7), dez. 2011. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/260772938\\_Study\\_of\\_the\\_damping\\_of\\_a\\_simple\\_pendulum\\_A\\_purpose\\_for\\_teaching\\_laboratory](https://www.researchgate.net/publication/260772938_Study_of_the_damping_of_a_simple_pendulum_A_purpose_for_teaching_laboratory). Acesso em: 18 abr. 2023.
- BESSA, G. R. **Teoria de estabilidade de equações diferenciais ordinárias e aplicações: modelos presa-predador e competição entre espécies**. 2011. 95 f. Dissertação - (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2011. Disponível em: <https://acervodigital.unesp.br/handle/11449/94369>. Acesso em: 30 dez. 2024.
- CARVALHO, C. J. P. **Modelo Predador-Presa: uma aplicação de sistemas de equações diferenciais ordinárias**. 2019. 65 f. Monografia (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Tocantins, Arraias, 2019. Disponível em: [https://repositorio.uft.edu.br/handle/11612/1370?locale=pt\\_BR](https://repositorio.uft.edu.br/handle/11612/1370?locale=pt_BR). Acesso em: 30 dez. 2024.
- CERQUEIRA, A. L. S.; SANTOS, D. A. R.; SILVA, D. A. M. **Manual de metodologia científica: desmistificando o método**. Salvador: Artset, 2013.
- NAGLE, R. K.; SAFF, E. B.; SNIDER, A. D. **Equações diferenciais**. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.
- SANTOS, A. T. Equações diferenciais - uma revisão de literatura. **Revista Engenharia, Meio Ambiente e Inovação**, Iguaçu, v. 10, p. 27-44, jan. 2023. Disponível em: [https://unignet.com.br/wp-content/uploads/Vol-10-Revista-Engenharia-Meio-Ambiente-e-Inovacao-V\\_10\\_n\\_01\\_2023.pdf#page=30](https://unignet.com.br/wp-content/uploads/Vol-10-Revista-Engenharia-Meio-Ambiente-e-Inovacao-V_10_n_01_2023.pdf#page=30). Acesso em: 30 dez. 2024.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais**, volume 1. 3. ed. Pearson Makron Books: 2001, São Paulo.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais**, volume 2. 3. ed. Pearson Makron

Books: 2001, São Paulo.

ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**, volume 1. 10. ed.  
Pearson Makron Books: 2016, São Paulo.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Matemática avançada para engenharia**, volume 3. 3. ed.  
Porto Alegre: Bookman, 2009.